RECHERCHE OPERATIONNELLE

Professeur : Monsieur Joseph SZCZYGIEL

17 séances

Examen : 1ère session le 28/03/2001
2ème session le 09/05/2001

SOMMAIRE

1 PREAMBULE **3**

2 INTRODUCTION **4**

2.1 HISTORIQUE 4
2.2 DEFINITION DE LA RECHERCHE OPERATIONNELLE 5

3 THEORIE DES GRAPHES **6**

3.1 CHRONOGRAMME 6
3.2 FACTORIELLE 6
3.3 ALGORITHME DE FORD 7

4 PROBLEME D'ORDONNANCEMENT **10**

4.1 DESCRIPTION 10
4.2 EXERCICES 13

5 PROGRAMMATION LINEAIRE **20**

5.1 MODELISATION ALGEBRIQUE 20
5.2 FORME MATRICIELLE 21
5.3 EXERCICES 22
5.4 METHODE DU SIMPLEXE 24

1 PREAMBULE

Ce document a été élaboré à partir de mes notes prises pendant les cours de recherche opérationnelle du CNAM.
Des erreurs ont pu se glisser dans le texte. N'hésitez pas à me communiquer vos remarques ou vos corrections.
Bonne lecture.

2 INTRODUCTION

2.1 Historique

Les précurseurs
1850 format, Pascal Espérance mathématique
Théorie math, des richesses
1917 File d'attente (réseaux téléphoniques)
1925 Théorie math des jeux
1936 Théorie des graphes
1939 Programmation linéaire

Les applications militaires
1940 Equipe Blacket
Efficacité optimale Globale

USA
1940 Groupe opération Research dans les états majors
Organisation de convois de navires
Blocus des ports japonais

Après la seconde guerre mondiale mise en place de groupe de RO dans les grandes entreprises EDF, SNCF, Armée

1948 Enseignement RO au HIT
En baisse de reconnaissance depuis 1970 : connaître ses limites

Exemple où la RO peut apporter quelque chose

- Positionnement Radar Localisation
- Délai de transmission (Communication interdisciplinaire ; maintenance prévisions des défaillances)
- Gestion Ressources humaines et formation
  Organisation des tâches
  Arborescence
  Redondance
  Priorisation des protections
  Optimisation
  Approvisionnement (qq cas)
  Gestion des contraintes de temps

Comment assure un bon fonctionnement des systèmes en conditions opérationnelles avec du personnel hétérogène ?

Les caractères qui en découlent
- bien poser le problème (qui souvent se construit) et inventorier les voies de traitements
- Vision globale
- La primauté accordée à la démarche rationnelle et aux méthodes quantitatives
- Une attention portée aux conditions réelles (et non seulement théoriques)

2.2 Définition de la Recherche Opérationnelle

Ensemble de méthode et d'outils d'analyse et de synthèse, de phénomènes d'organisation utilisables pour élaborer de meilleures décisions.

Trouver une solution à un problème avec des ressources limitées.

RO discipline carrefour entre Informatique, mathématique et économie d'entreprise.

Domaine d'application
- Production
  Allocation des ressources limitées pour l'obtention d'un objectif
- Ordonnancement
  1960 méthode PERT (Program Evaluation Review Technique) utilisée Fusée Polaris
  Séquencement d'instruction dans les ordinateurs multiprocesseurs
- Gestion de stocks
- Logistique
  Localisation optimale des dépôts
  Approvisionnement des clients à partir des dépôts afin de minimiser le coût global des transports
  Choix des meilleurs chemins (voyageurs, transport, déplacement de pièces dans un atelier)

Type d'application
- Problème combinatoire
  Exercice nombre de possibilités pour 8 personnes (2 repas/jour)
  Définition des investissements les plus rentables
  Ordonnancements
- Problème aléatoire
  Exercice des files d'attente : pointe de trafic
  Pb de stocks
- Problème de situation de concurrence
  Exercice Situation avec un concurrent
  Définition d'une politique de vente, d'approvisionnement

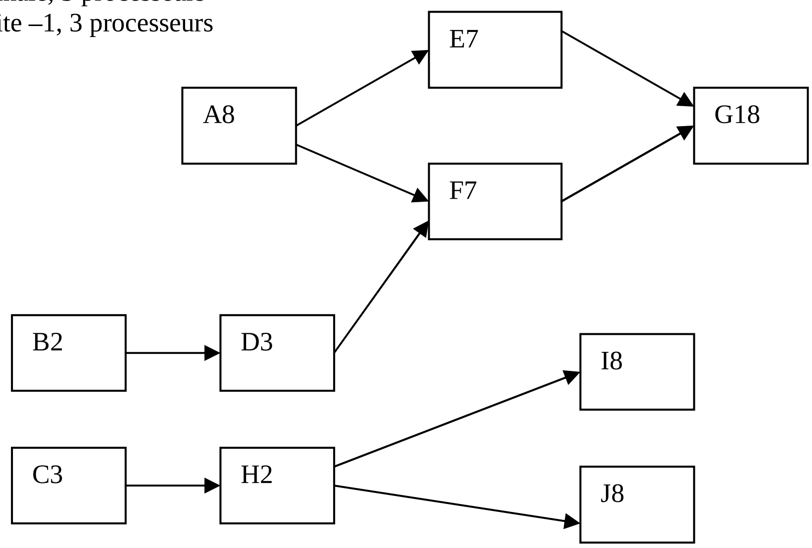
3 THEORIE DES GRAPHES

3.1 Chronogramme

Ex : Les multiprocesseurs

Les règles :
Une tache ne peut être commencée que si la précédente est terminée
Toute tache commencée ne peut être interrompue
S'il y a choix de démarrer plusieurs taches possibles, le choix se fera par ordre alphabétique
Les taches sont attribuées au processeur par numéro d'ordre processeur croissant

4 cas de figures à envisager
1 - Durée nominale, 2 processeurs
2 - Durée réduite –1, 2 processeurs
3 - Durée nominale, 3 processeurs
4 - Durée réduite –1, 3 processeurs



Chronogramme :
Cas 1 :

Processeur 1	A	A	A	A	A	A	A	A	E	E	E	E	E	E	E	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G
Processeur 2	B	B	C	C	C	D	D	D	F	F	F	F	F	F	F	H	H	I	I	I	I	I	I	I	I	J	J	J	J	J	J	J	J

Cas 1 : 33
Cas 2 : 36
Cas 3 : 38
Cas 4 : 33
Donc résultat, les cas 1 ou 4 sont les plus optimaux.

3.2 Factorielle

Ex : A table

8 personnes table avec 2 repas par jour combien de combinaison possible ?
8 ! / 2 = 8x7x6x5x4x3x2x1 / 2 = <u>20160</u>

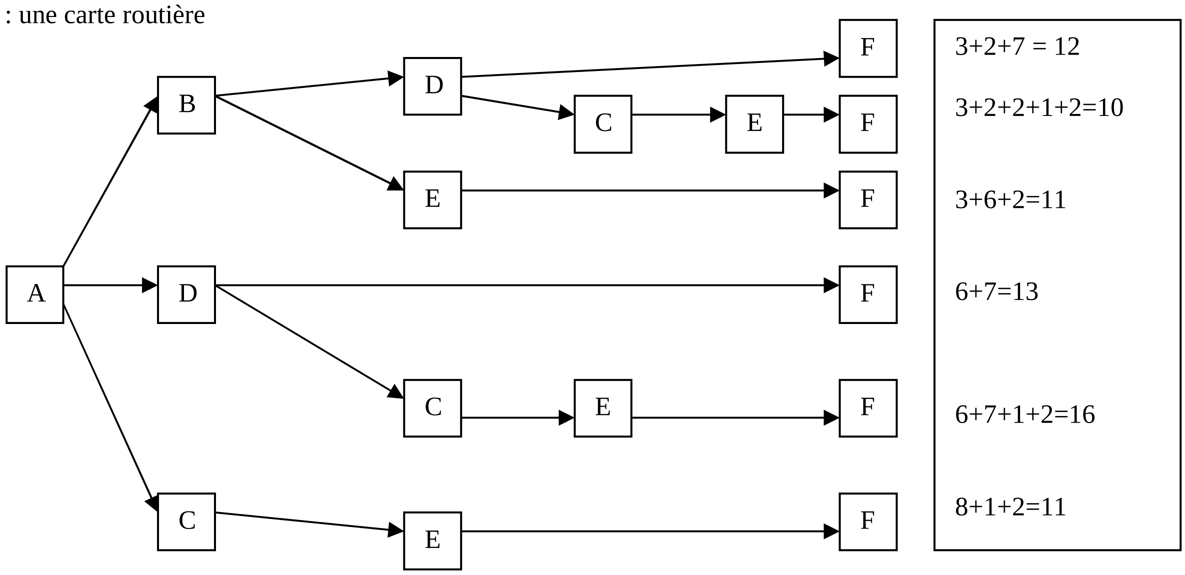
Ex : DRH
20 personnes à 20 postes différents ?
20 ! = <u>2,43 E+18</u>

Le but de la RO est de réduire le nombre de combinaison

3.3 Algorithme de Ford

Application des chemins de valeur optimale

Ex : une carte routière

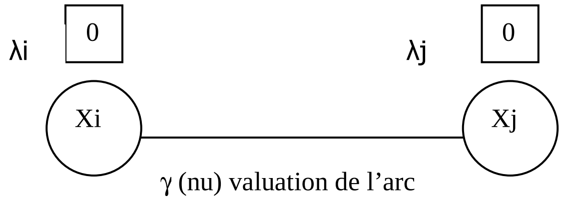


	A	B	C	D	E	F
A	X	3	8	6		
B	3	X		2	6	
C	8		X		1	
D	6	2		X		7
E		6	1		X	2
F		6		7	2	X

Algorithme de Ford

B (A,3)
C (A,8) (D,7)
D (B,5) (A,6)
E (B,9) (C,8)
F (D,11) (E,10)

Ex : Trouver le chemin le plus long entre E et S



$\Sigma ji = \lambda j - \lambda i$

Algorithme de Ford pour un chemin minimal

V (Xi, Xj) = +∞

Si (Xi, Xj) ⊄ U

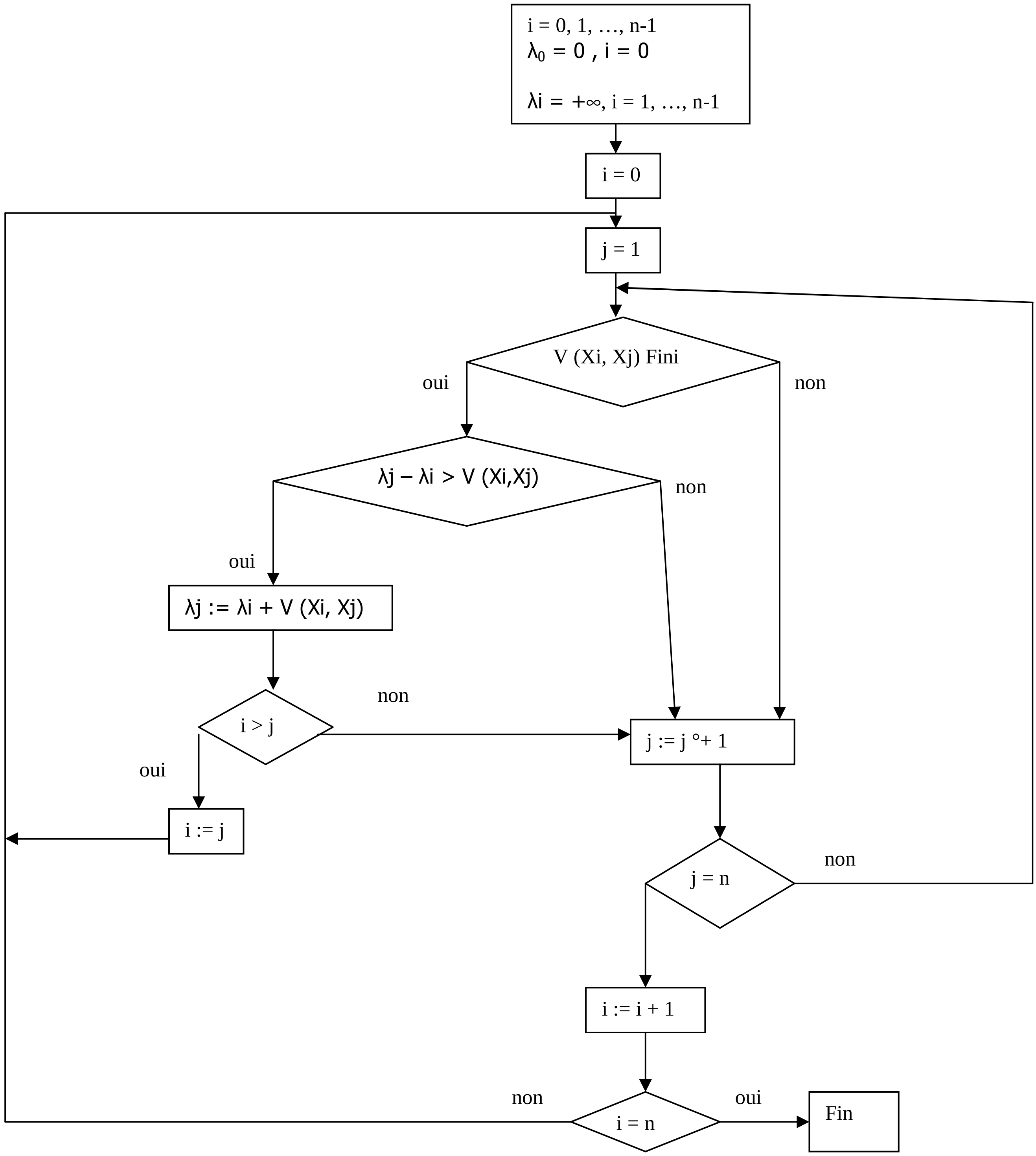


Tableau résultant de l'Algorithme de Ford

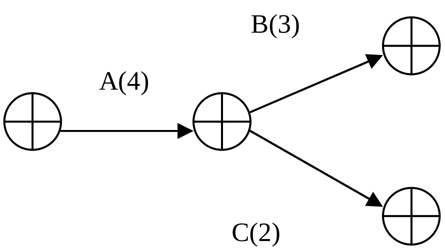
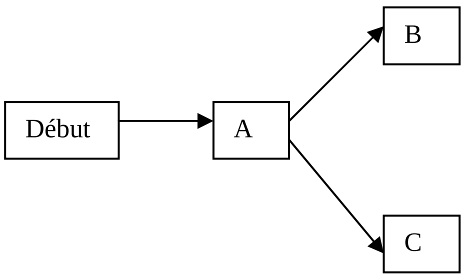
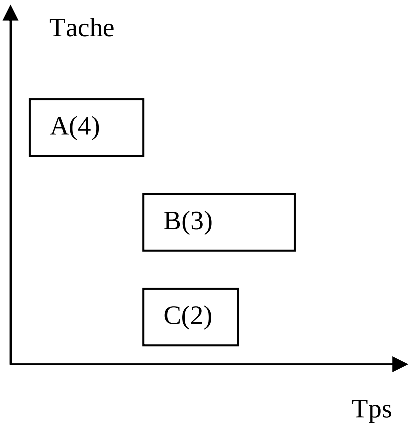
i	j	(Xi,Xj) existe ?	$(\lambda j - \lambda i) > \gamma(Xi,Xj)$	$\lambda j \Leftarrow \lambda i + \gamma$	i>j	$i \Leftarrow j$ & $j \Leftarrow =1$	$j \Leftarrow j+1$	j=n ?	Fin ?	$\lambda 1$ $+\infty$	$\lambda 2$ $+\infty$	$\lambda 3$ $+\infty$	$\lambda 4$ $+\infty$	$\lambda 5$ $+\infty$
0	1	Oui	∞-∞>3 oui	3	Non		2	Non		3				
0	2	Oui	∞-∞>8 oui	8	Non		3	Non			8			
0	3	Oui	∞-∞>6 oui	6	Non		4	Non				6		
0	4	Non					5	Non						
0	5	Non					6	Oui						
1	1	Non					2	Non						
1	2	Non					3	Non						
1	3	Oui	6-3>2 oui	2+3=5	Non		4	Non				5		
1	4	Non	∞-3>6 oui	6+3=9	Non		5	Non					9	
1	5	Non					6	Oui						
2	1	Non					2	Non						
2	2	Non					3	Non						
2	3	Non					4	Non						
2	4	Oui	9-8>1 non				5	Oui						
3	1	Non					2	Non						
3	2	Oui	8-5>2 oui	2+5=7	Oui	X		Non			7			
2	1	Non					2	Non						
2	2	Non					3	Non						
2	3	Non					4	Non						
2	4	Oui	9-8>1 non				5	Non						
2	5	Non					6	Oui						
3	1	Non					2	Non						
3	2	Oui	7-5>2 non				3	Non						
3	3	Non					4	Non						
3	4	Non					5	Non						
3	5	Oui	∞-5>7 oui	5+7=12	Non		6	Oui						12
4	1	Non					2	Non						
4	2	Non					3	Non						
4	3	Non					4	Non						
4	4	Non					5	Non						
4	5	Oui	12-9>2 oui	9+2=11	Non		6	Oui						11
5	1	Non					2	Non						
5	2	Non					3	Non						
5	3	Non					4	Non						
5	4	Non					5	Non						
5	5	Non					6	Oui	FIN	3	7	6	9	11

4 PROBLEME D'ORDONNANCEMENT

4.1 Description

PERT est une méthode française
MPM est une méthode utilisée dans les logiciels

Lien entre les taches
Lien de précédence
Délai d'attente

PERT	MPM	GANTT
O = un événement (Rdv technique)	-> = lien de dépendance	= Tache
-> = une tache --> = tache fantôme fictive (durée ∅)	= une tache (la longueur de la tache est différente de la durée)	= une tache (la longueur de la tache =la durée)
		

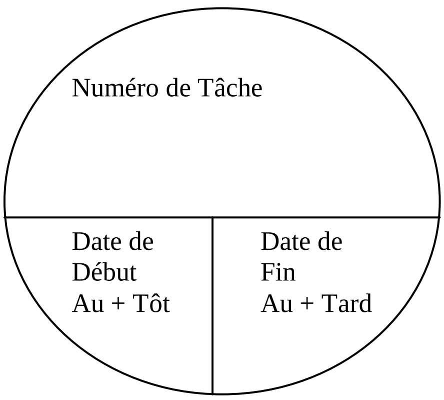
2 types de marges
1 qui touche à la date de début de la tache suivante sans toucher à la date de fin de projet
1 qui ne touche pas à la date de début de la tache suivante en touchant à la date de fin de projet

DANS LE CALCUL DE LA DATE AU + TOT, ON PREND LE MAX
DANS LE CALCUL DE LA DATE AU + TARD, ON PREND LE MIN

Si date au + tard = date au + tôt alors pas de marge

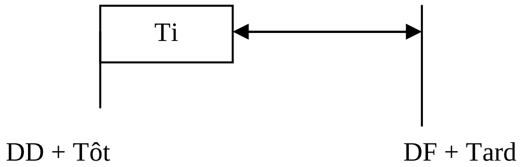
	Au + Tôt	Au + Tard
Date Début		
Date Fin		

Attention : Toujours indiquer une légende dans un schéma

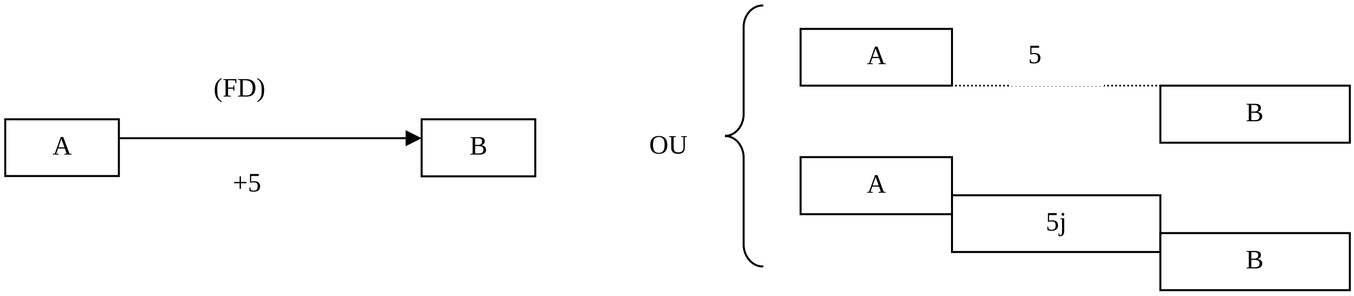


Règle : Si date de début au plus tôt = date de fin au plus tard alors taches sur le chemin critique

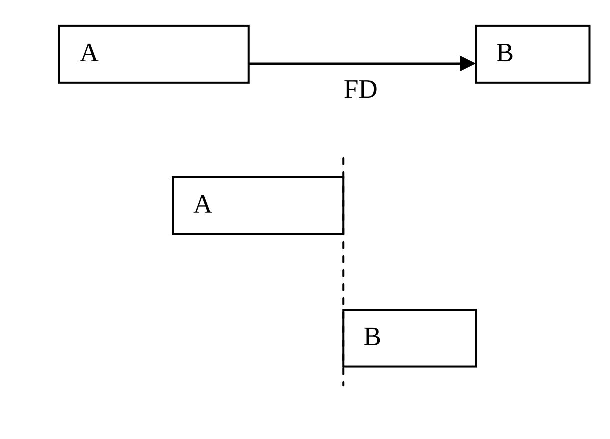
Marge libre ML(Ti) = DF +Tard – DD +Tôt – DT'i	Marge Totale MT(Ti) =	



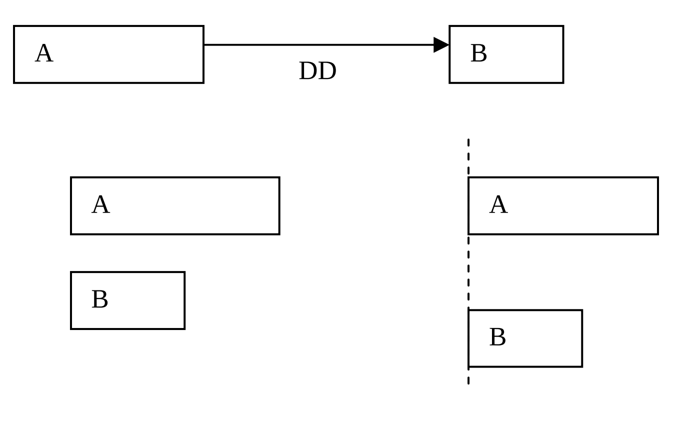
Décalage de liens
Fin Début = FD
Déc + 5



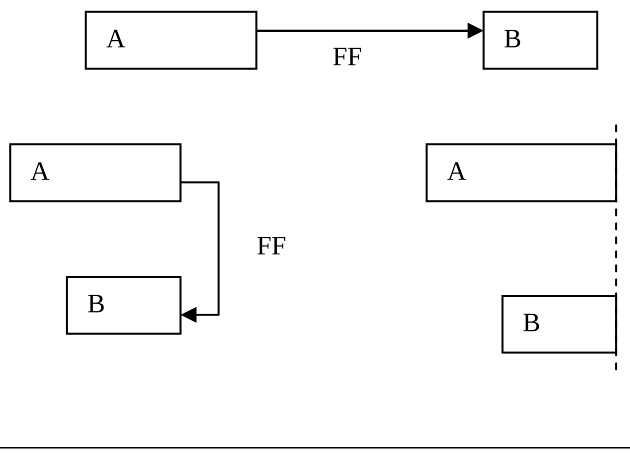
Fin-Début (FD)



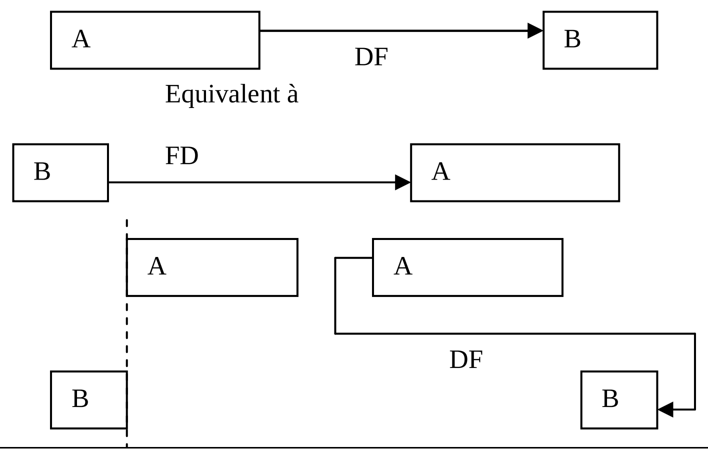
Début-Début (DD)



Fin-Fin (FF)



Début-Fin (DF)

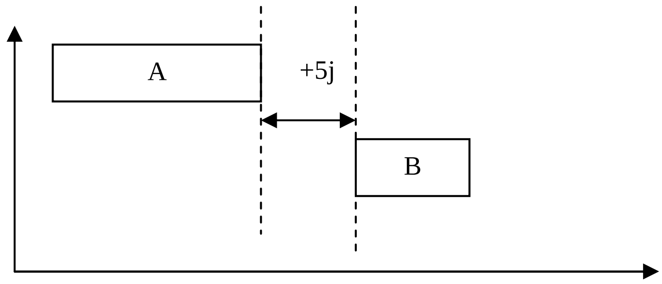
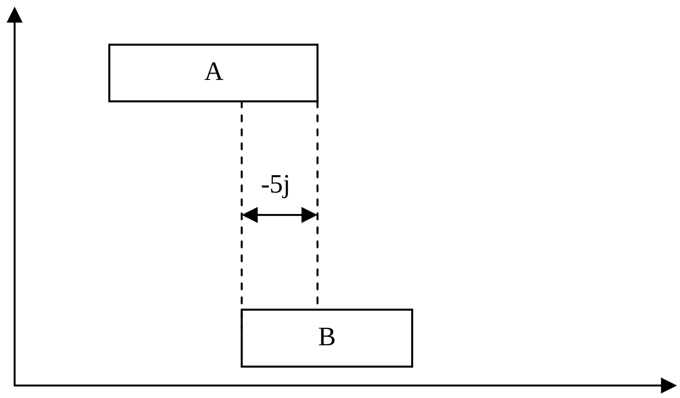


Plannification

Problème des retards sur tâche via le lien intertâche

Exemple 1 une tache B va commencer après la tache A en subissant un retard du lien de 5 jours
Exemple 2 après avoir fait les platres, il faut attendre une semaine pour commencer la pose du papier
MPM Plâtre + 5 jours pose papier
Fin à Début 0 jours par défaut

Deux possibilités

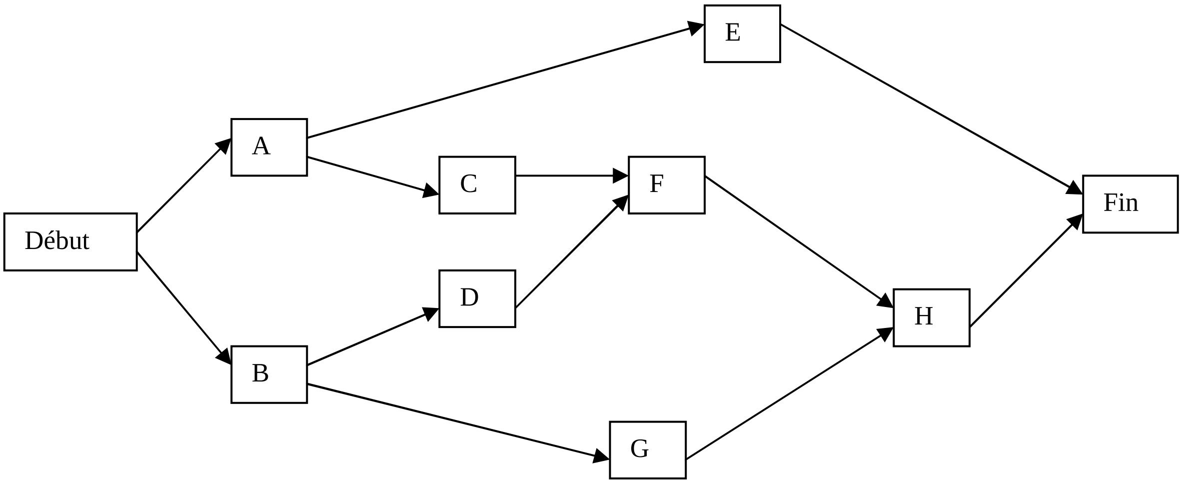
	FD
	
	FD
	

4.2 Exercices

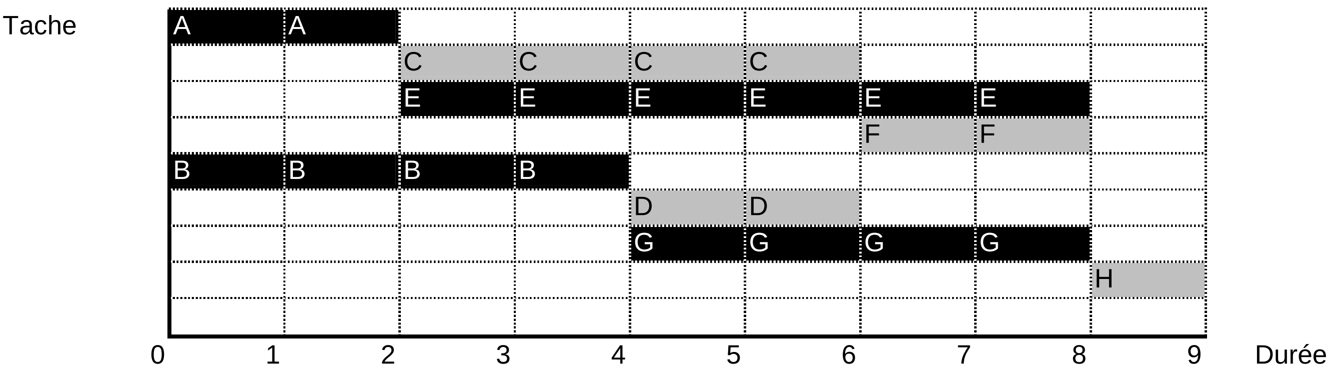
Ex : ordonna2.doc page 6/13

Taches	A	B	C	D	E	F	G	H
Taches préc.			A	B	A	C,D	B	F,G
Durée	2	4	4	2	6	2	4	1

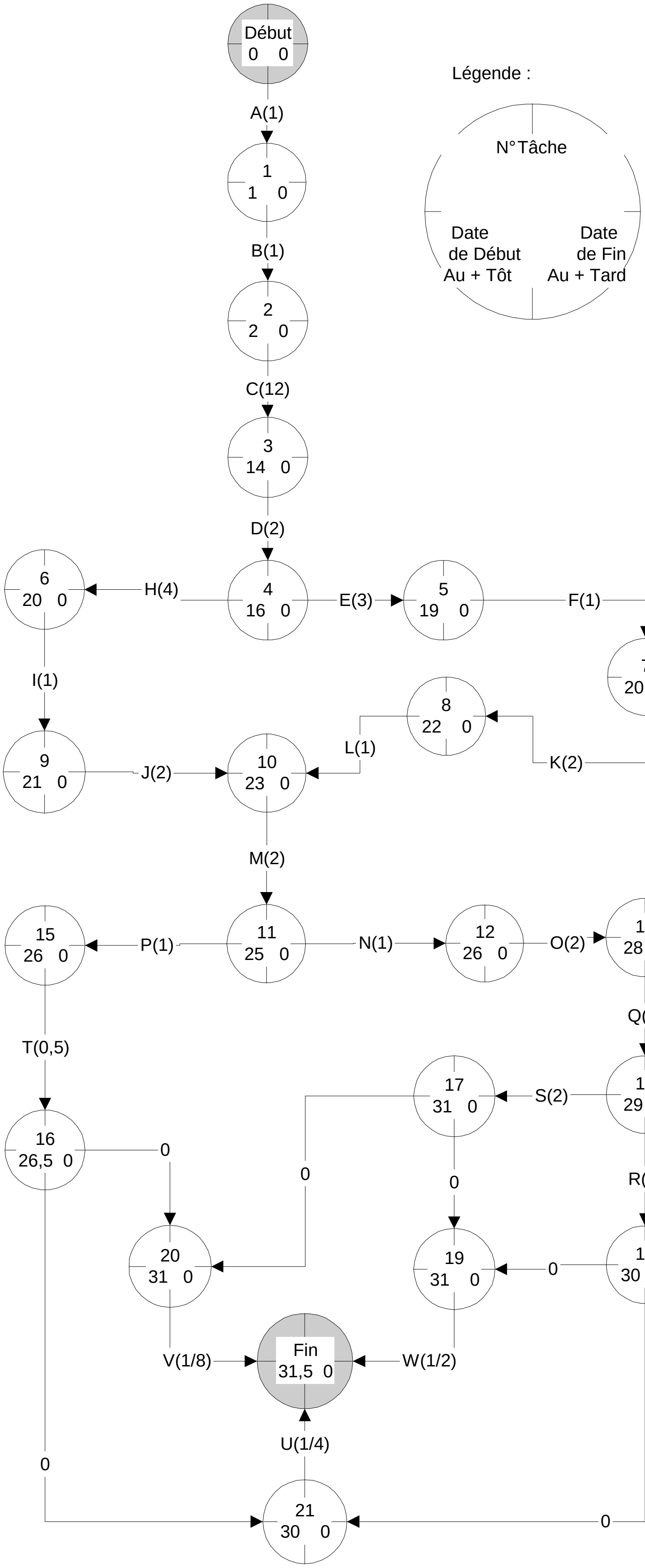
MPM



GANTT



PERT ordonna2.doc page 12/13



Attention dans ce schéma la date de fin au + tard n'a pas été calculée. Elle est renseignée à zéro.

Ex : Construction d'une maison

Tableau des Précédents, des Dates de Débuts, des Dates de Fins et des Marges :

Code Tache	Nom de la tache	Précéd	Durée	Date Début Au + Tôt	Date Début Au + Tard	Date Fin Au + Tôt	Date Fin Au + Tard	Marge Libre (4)-(1)-D	Marge Totale	Marge Certaine
A	Commande et Livraison câblage		3	0	6	3	9	9-0-3=6	9-3-3=6	9-0-3=0
B	Pose Câblage	A, I	4	9	9	13	13	13-9-4=0	13-9-4=0	13-9-4=0
C	Inspection Câblage	B	1	13	13	14	14	14-13-1=0	14-13-1=0	14-13-1=0
D	Commande et Livraison Matériel Plomberie		4	0	3	4	7	7-0-4=3	7-0-4=3	4-0-4=0
E	Travaux plomberie Extérieure	H, D	2	4	7	6	9	9-4-2=3	9-4-2=3	9-7-2=0
F	Travaux plomberie Intérieure	I, E	5	9	9	14	14	14-9-5=0	14-9-5=0	14-9-5=0
G	Terrassement		1	0	0	1	1	1-0-1=0	1-0-1=0	1-0-1=0
H	Fondation	G	3	1	1	4	4	4-1-3=0	4-1-3=0	4-1-3=0
I	Construction Ossature	H	5	4	4	9	9	9-4-5=0	9-4-5=0	9-4-5=0
J	Commande et Livraison Brique		6	0	9	6	15	15-0-6=9	15-0-6=9	9-0-6=3
K	Briquetage	J, I	3	9	15	12	18	18-9-3=6	18-9-3=6	17-15-3=-1
L	Commande et Livraison Tuiles		14	0	1	14	15	15-0-14=1	15-0-14=1	14-0-14=0
M	Construction Charpente	I	2	9	12	11	14	14-9-2=3	14-9-2=3	11-9-2=0
N	Pose Couverture	M, L	2	14	15	16	17	17-14-2=1	17-14-2=1	17-15-2=0
O	Revêtement Intérieur	M, C, F	3	14	14	17	17	17-14-3=0	17-14-3=0	17-14-3=0
P	Aménagement Intérieur	N, O	3	17	17	20	20	20-17-3=0	20-17-3=0	20-17-3=0
Q	Inspection Générale	P	2	20	20	22	22	22-20-2=0	22-20-2=0	22-20-2=0
R	Nettoyage extérieur	N, K, O	1	17	18	18	19	19-17-1=1	19-17-1=1	17-18-1=-1
S	Aménagement extérieur	R	3	18	19	21	22	22-18-3=1	22-18-3=1	22-19-3=0
	FIN	Q, S								

+ Durée

- Durée

Tableau des Potentiels

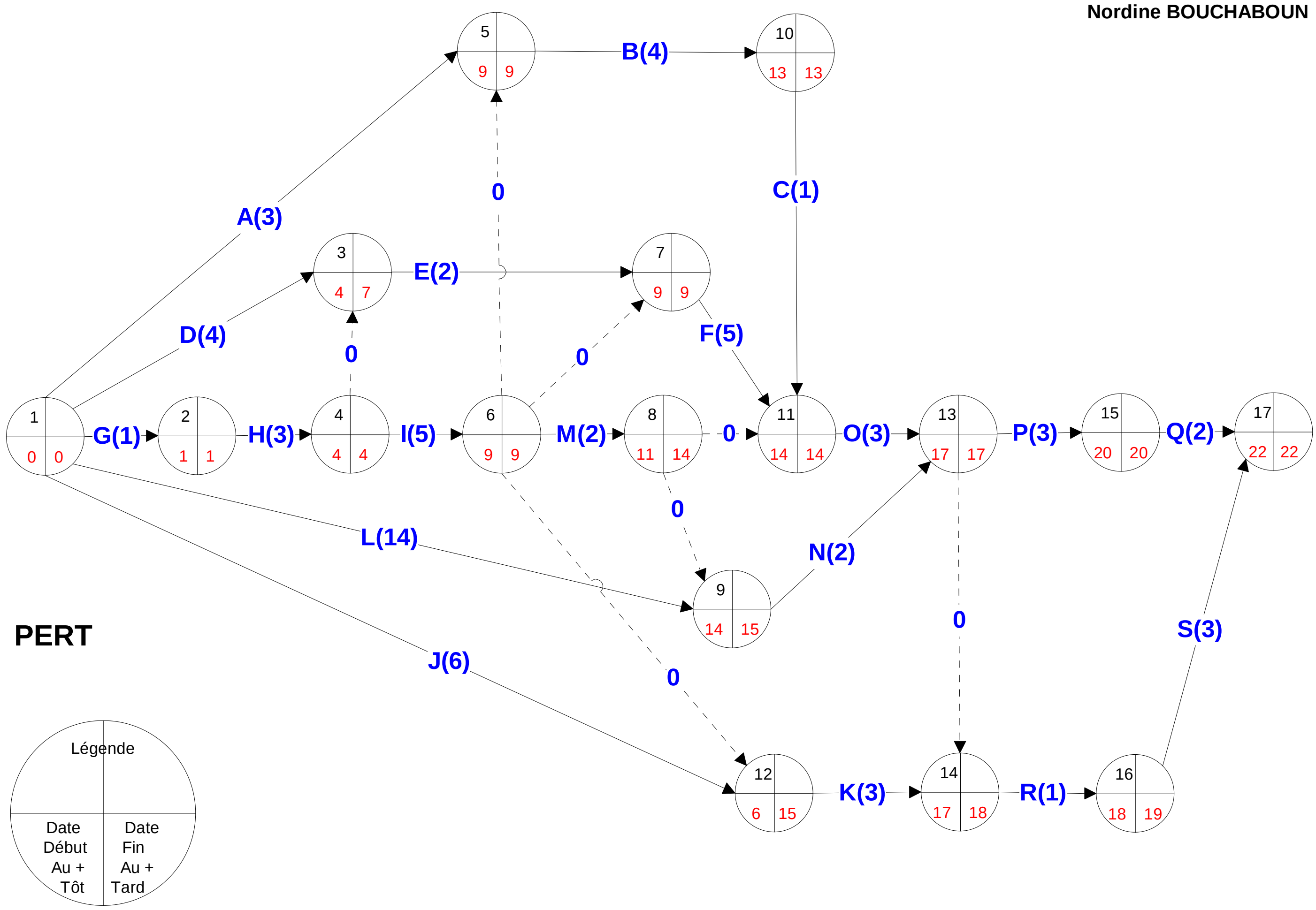
0	A	9	B	13	C	0	D	4	E	9	F	0	G	1	H
0	Début = 0	0	A=3	9	B=4	0	Début = 0	1	H=3	4	I=5	0	Début = 0	0	G=1
		4	I=5					0	D=4	4	E=2				

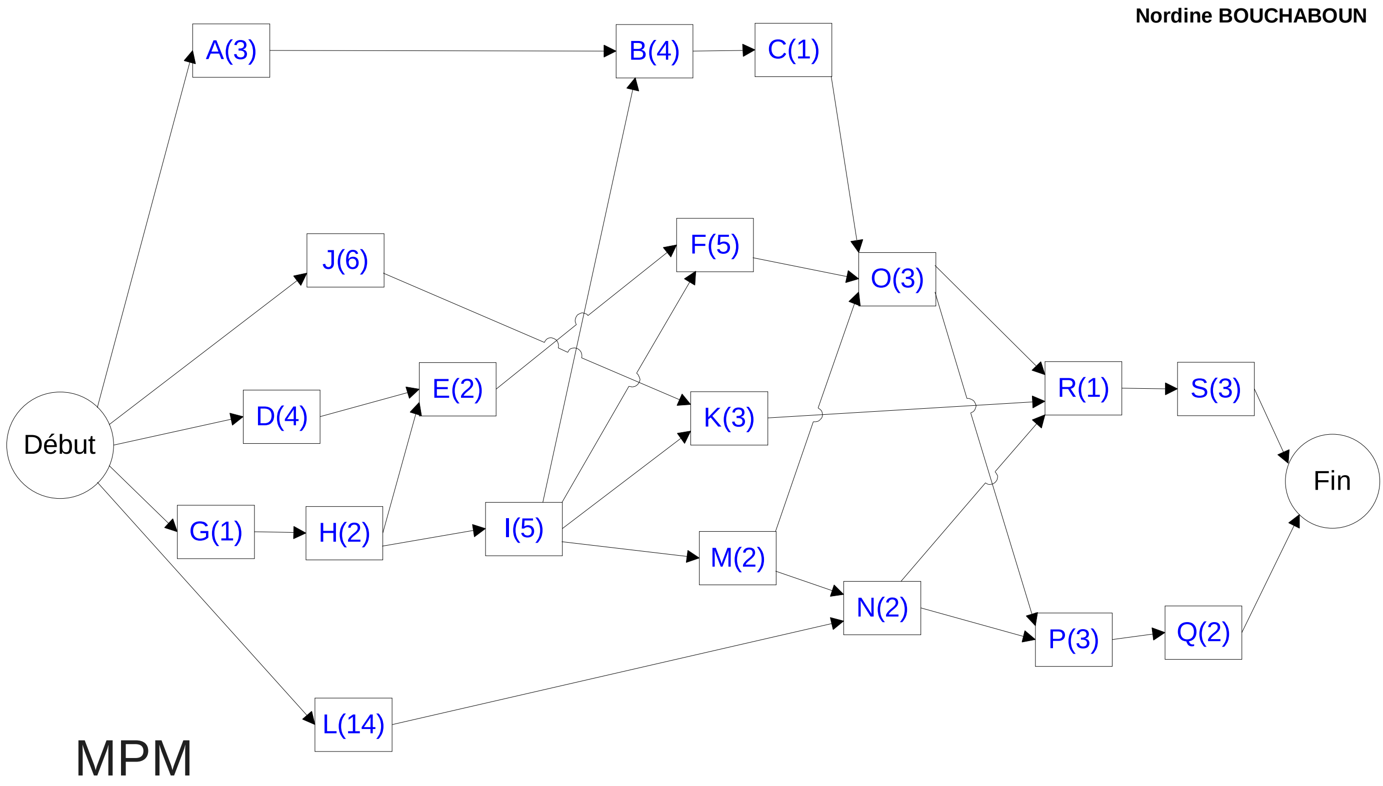
4	I	0	J	9	K	0	L	9	M	14	N	14	O	17	P
1	H=3	0	Début = 0	0	J=6	0	Début = 0	4	I=5	9	M=2	9	M=2	14	N=2
				4	I=5					0	L=14	13	C=1	14	O=3
												9	F=5		

20	Q	17	R	18	S	22	Fin
17	P=3	14	N=2	17	R=1	20	Q=2
		9	K=3			18	S=3
		14	O=3				

Les deux chemins critiques sont :
Début G H I B C O P Q Fin
Début G H I F O P Q Fin

PERT et MPM de la construction d'une maison





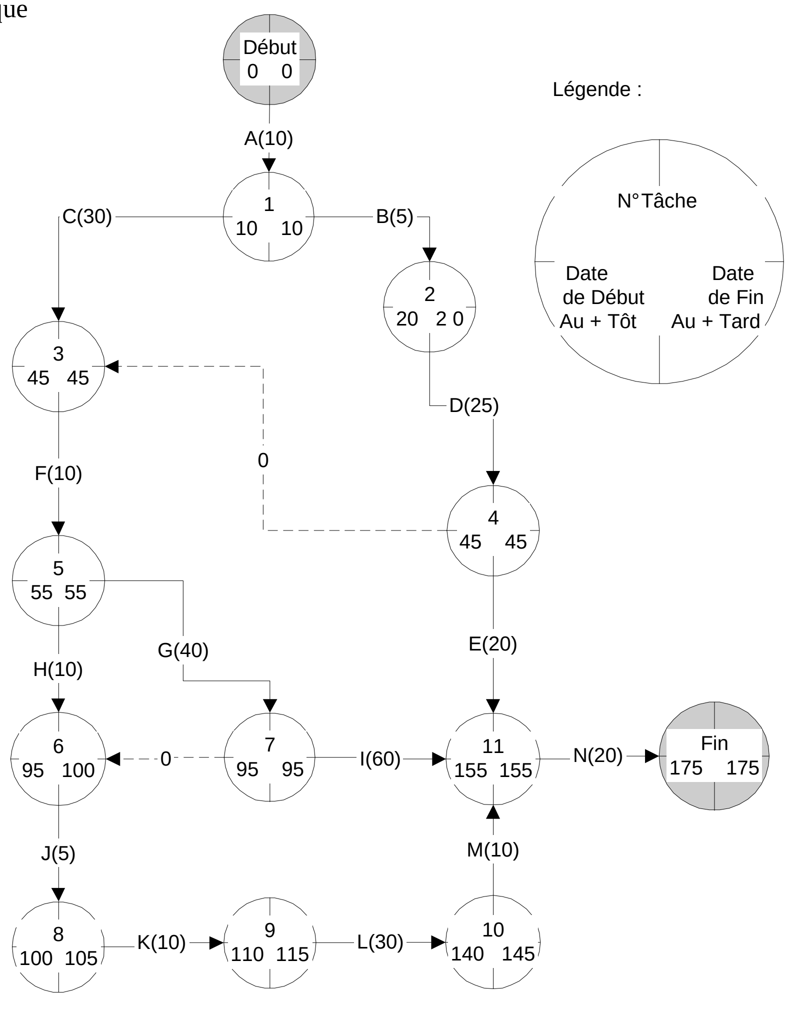
Ex : Projet intranet

Code Tache	Nom de la tache	Précédent	Durée	Date Début Au + Tôt	Date Début Au + Tard	Date Fin Au + Tôt	Date Fin Au + Tard	Marge Libre	Marge Totale	Marge Certaine
A	Lancement		10							
B	Création prototype	A (fd+0j)	5							
C	Diagnostic de l'existant	A	30							
D	Proto intranet	B fd+5j	25							
E	Validation architecture	D	20							
F	Bilan	« C ;D »	10							
G	Expression du besoin	F	40							
H	Déploiement navig	F	10							
I	Etude Organisation	G	60							
J	Spécification Générale	« G ;H »	5							
K	Spécification Détaillée	J	10							
L	Programmation	K	30							
M	Recette prog	L	10							
N	MEO	« E ;I ;M »	20							
	FIN	N								

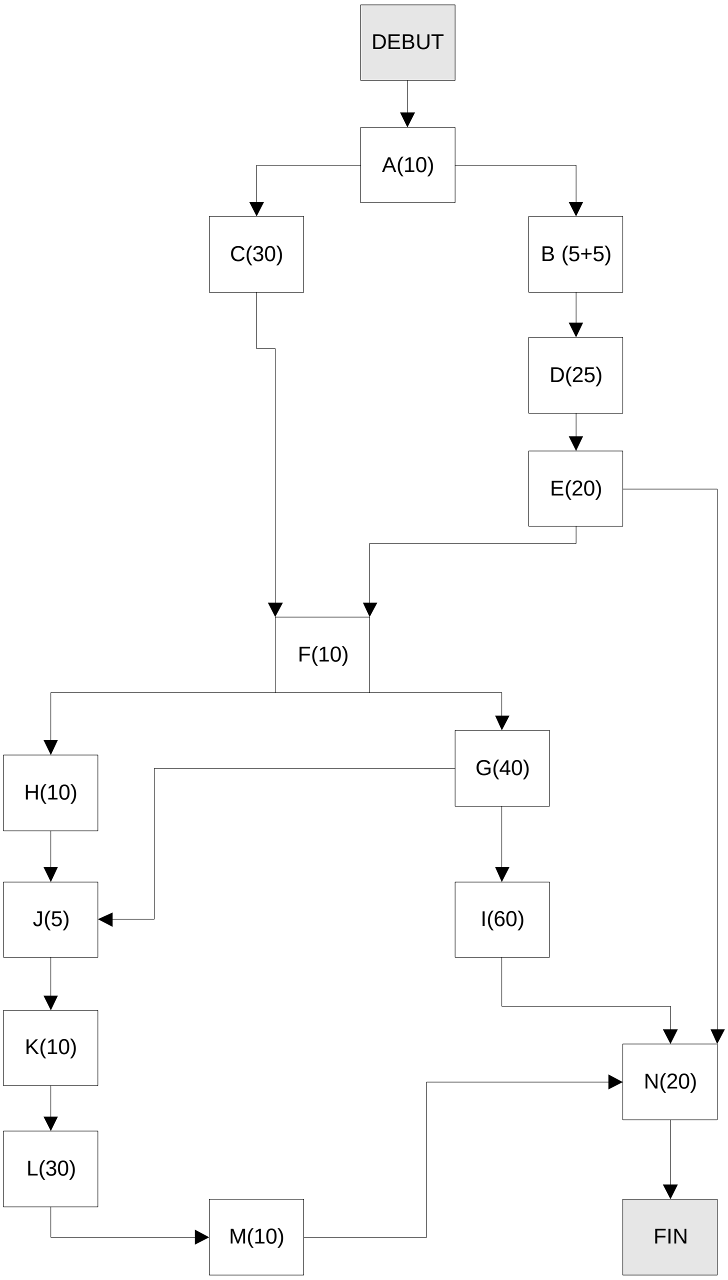
+ Durée - Durée

1) Dessiner le graphe potentiel – Etape PERT
2) Dessiner le graphe potentiel – Tache MPM
3) Faire le tableau des potentiels
4) Calculer les dates au +tôt (Début et Fin), dates au +tard (Début et Fin)
5) Calculer les marges libres et marges totales
6) Donner le chemin critique

PERT Intranet



MPM Intranet



Ex : Planning de projet de la société Z-COM

Tableau des Précédents, des Dates de Débuts, des Dates de Fins et des Marges :

Code Tache	Nom de la tache	Précéd	Durée	Date Début		Date Fin		Marge		
				Au + Tôt	Au + Tard	Au + Tôt	Au + Tard	Libre (4)-(1)-D	Totale	Certaine
1			0	0	0	0	0	0		
2		1	2	0	0	2	2	0		
3		2	6	2	2	8	8	0		
4		3	1	8	8	9	9	0		
5		4	0	9	9	9	9	0		
6		5	1	9	9	10	10	0		
7		6	5	10	15	15	20	5		
8		6	10	10	10	20	20	0		
9		6	7	10	13	17	20	3		
10		7, 8, 9	10	20	20	30	30	0		
11		10	5	30	30	35	35	0		
12		11	5	35	35	40	40	0		
13		12	10	40	40	50	50	0		
14		13	20	50	50	70	70	0		
15		14FF	10	60	70	70	70	0		
16		14FF	15	55	70	70	70	0		
17		13,14, 15, 16	10	70	70	80	80	0		
18		17	5	80	80	85	85	0		
19		17DD	10	70	80	80	80	0		
20		18, 19	2	85	85	87	87	0		
21		20	0	87	87	87	87	0		
22		20	1	87	87	88	88	0		
23		22	15	88	88	103	103	0		
24		23	5	103	113	108	118	10		
25		23	15	103	103	118	118	0		
26		24, 25	10	118	118	128	128	0		
27		26	20	128	128	148	148	0		
28		26	15	128	133	143	148	5		
29		27, 28	10	148	148	158	158	0		
30		29	0	158	158	158	158	0		
31		30	30	158	158	188	188	0		
32		31	10	188	188	198	198	0		
33		32	10	198	198	208	208	0		
	FIN	33								

+ Durée - Durée

Le chemin critique est 1/2/3/4/5/6/8/10/11/12/13/14/17/18/20/21/22/23/25/26/27/29/30/31/32/33

5 PROGRAMMATION LINEAIRE

5.1 Modélisation algébrique

Ex : Usine

Une usine produit 2 ciments ayant un bénéfice de 500FF et 700FF / Tonne.
Pour faire une tonne de ciment 1, il faut 40 minutes de four à chaux et 20 minutes de broyage.
Pour fabriquer une tonne de ciment 2, il faut 30 minutes de four à chaux et 30 minutes de broyage.
Le four est disponible 6H/jour, le broyeur 8H/jour.
Combien faut-il produire chaque jour pour maximiser le bénéfice ?

Ce problème se modélise aisément par le programme linéaire suivant :

Max Z = 500 X1 + 700 X2

40 X1 + 30 X2 =< 360
20 X1 + 30 X2 =< 480
X1 et X2 >= 0

Programme mathématique
Problème d'optimisation d'une fonction à plusieurs variables en présence de contraintes.

Programme linéaire
Si la fonction objective et les contraintes sont des combinaisons linéaires de variables.

Forme géométrique
N variables positives ou nulles
M contraintes d'inégalités
Une fonction à optimiser
Les coefficients de coûts de X1 sont notés ici :
Max ou Min Z = SUM (j=1 ;n) Ci Xj

Pour i de 1 à m : SUM (j=1 :n) Aij Xj
Pour j=1 à n : Xj > 0

Solution réalisable
Combinaison de variables qui vérifient les contraintes
Ex : X1 = 4 et X2 = 2

Solution optimale
C'est une solution réalisable telle qu'il n'y a aucune autre solution avec un profit supérieur

Programme linéaire en nombre entier (PLNE)
Si les variables sont astreintes à être booléennes

Programme mixtes
Comprend un mélange de variables continues et entières
Variables entières Ex : unité sac – le demi-sac n'existe pas
Idem pour les personnes

Complexité des types de programmes linéaires
La complexité va croissante dans la liste suivante
Programmes linéaires
Programmes linéaires en nombres entiers
Programmes linéaires en 0-1
Programmes non linéaires, pour lesquels en général, on se sait trouver qu'un optimum local

5.2 Forme matricielle

- Notation

Vecteur des variables X = (X1, X2, …, Xn) T

T = transposé

$$T \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ \dots \\ Xn \end{pmatrix}$$

Vecteur du second membre des contraintes : b = (b1, b2, …, bn)
Vecteur des coûts ou profits : c = (c1, c2, …, cn)

- 2 formes d'écritures d'un programme linéaire
  Forme canonique :Avec des contraintes d'inégalité (<=) destinée à la résolution graphique
  Forme standard : avec des contraintes d'égalité (=) destinée à la résolution algébrique

Forme canonique
Max C X
A.X <= B
X >= 0

Forme standard
Max C X
A.X = B
X >= 0

Note :
Les problèmes comportent généralement des égalités et des inégalités
Les logiciels du marché acceptent les deux.

Le passage d'une inégalité à une égalité s'obtient en ajoutant une variable d'écart
Exemple :
SUM (j=1 :n) Aij Xj <= Bi
Avec Ei >= 0 cela devient
SUM (j=1 :n) Aij Xj + Ei = Bi

Passage d'une maximisation à une minimisation
Maximiser Z revient à minimiser –Z
Ne pas oublier de multiplier par –1 la fonction objective pour trouver la minimisation

Interprétation économique
Un programme linéaire a une interprétation économique très large :
Un acteur économique exerce n activités avec des intensités Xj à déterminer
Les activités nécessitent m ressources
On connaît la quantité Aij de ressources nécessaires pour exercer l'activité j avec une intensité 1
On connaît aussi le coût (en minimisant) ou le profit (en maximisant) Cj correspondant à une activité j d'intensité 1
On veut trouver les intensités des activités, compatibles avec les ressources, pour maximiser le profit ou minimiser le coût

Hypothèse PL

La programmation linéaire correspond à une classe très large de problème sous 2 réserves (hypothèses) :
Proportionnalité des coûts et des consommations de ressources, aux intensités des activités
Additivé des consommations de ressources (pas d'interactions entre activités)

Une Résolution géométrique (ou graphique) est possible avec 2 ou 3 variables maximum

5.3 Exercices

Ex : l'usine

Résoudre géométriquement le problème suivant :
Une société fabrique 2 produits X1 et X2
Le produit X1 rapporte un bénéfice de 1F / unité
Le produit X2 rapporte un bénéfice de 2F / unité
L'usine est elle que l'on doit fabriquer les 2 produits sur la même machine et durant 6 heures / jour maximum
De plus le produit X2 ne peut être fabriqué qu'au maximum 3 heures par jour pour des raisons de sécurité.
Quelle quantité de X1 et X2 doit on fabriquer par jour ?

Modélisation algébrique du programme linéaire

Max (Z) = X1 + 2 X2
X1 + X2 =< 6
X2 =< 3
X1 et X2 >= 0

Tracer sur un repère orthonormé les droites suivantes
X1 + X2 = 6
X2 = 3
X1 + 2 X2 = 0
Puis hachurer les parties ne répondant pas aux conditions.

VOIR ANNEXE 1

Ex : L'entreprise (cf programmation linéaire.doc page 1/5)

P1 est fabriqué en 50h
P2 est fabriqué en 25h
P3 est fabriqué en 75h
Utilisation de la machine maxi = 45h / Semaine

(1/50) P1 + (1/25) P2 + (1/75) P3 <= 45
=>
(1/25*2) P1 + (1/25) P2 + (1/25*3) P3 <= 45
=>
(1/2) P1 + P2 + (1/3) P3 <= 1125
* 150 =>
3 P1 + 6 P2 + 2 P3 <= 6750

Max (4 P1 + 12 P2 + 3 P3)
P1 <= 1000
P2 <= 500
P3 <= 1500
P1, P2 et P3 >= 0

Pour construire le graphique calculer la production maxi par semaine
Pour P1 : 45*50 = 2250
Pour P2 : 45*25 = 1125
Pour P3 : 45* 75 = 3375

Résultat voir graphique dans page 1/5 de programmation linéaire.doc

Ex :

100 X1 = 138
100 X2 = 136

Les contraintes sont les suivantes :
X1 >= 0
X2 >= 0
2 X1 + X2 =< 200 (D1)
X1 + 4,5 X2 =< 540 (D2)
4 X1 + 3 X2 =< 480 (D3)

Max (138 X1 + 136 X2 – 20 X1 – 10 X2 – 12 X1 – 54 X2 + 56 X1 + 42 X2) =
Max (50 X1 + 30 X2)

Pour dessiner le max sur le graphique
50 X1 + 30 X2 = 0
X1 = -(30/50) X2 = -(3/5) X2
Quand X2 = 50 alors X1 = -30
Quand X2 = 100 alors X1 = -60

Pour déterminer les points d'intersections :

Pour information il existe 3 méthodes de résolutions de 2 équations à 2 inconnues (combinaison linéaire, substitution, déterminants)

Entre (D2) et (D3)

X1 + 4,5 X2 = 540
4 X1 + 3 X2 = 480

⇨ X1 = 540 – 4,5 X2
⇨ 4 (540 – 4,5 X2) + 3 X2 = 480
⇨ 2160 – 18 X2 + 3 X2 = 480
⇨ X2 = 112
⇨ 4 X1 + (3 * 112) = 480
⇨ X1 = (480 – 336) / 4 = 36
⇨ Le point d'intersection est en X1 = 36 et X2 = 112

Entre (D1) et (D(3)

2 X1 + X2 = 200
4 X1 + 3 X2 = 480

$$X1 = \frac{\begin{vmatrix} 200 & 1 \\ 480 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{(200*3) - (1*480)}{(2*3) - (1*4)} = \frac{600 - 480}{6-4} = \frac{120}{2} = 60$$

$$X2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 200 \\ 4 & 480 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{160}{2} = 80$$

Max (50 X1 + 30 X2)
(50 *60 + 30 * 80) = 5400FF

VOIR ANNEXE 2

Ex : Minimisation d'un coût

Soit le programme linéaire suivant

X1 >= 0
X2 >= 0
-2 X1 + X2 =< 2 (D1)
X1 – 2 X2 =< 2 (D2)
X1 + X2 =< 5 (D3)

Min (- X1 + X2)

VOIR ANNEXE 3

5.4 Méthode du simplexe

Exercice page 3/5 du programmation lineaire.doc

Ci	i	1	2	3	4	5	6	7	Xi	
	4	1	0	0	1	0	0	0	1000	1000 / 0^+ = infini
	5	0	1	0	0	1	0	0	500	500 / 1 = 500
	6	0	0	1	0	0	1	0	1500	1500 / 0^+ = infini
	7	3	6	2	0	0	0	1	6750	6750 / 6 = 1125
	Di	4	12	3	0	0	0	0	11000	
			E			S				

Ancienne ligne 7	3	6	2	0	0	0	1	6750
-6 x Pivot	0	-6	0	0	-6	0	0	-6 x 500 = -3000
Nouvelle ligne 7	3	0	2	0	-6	0	1	3750
Ancienne Di	4	12	3	0	0	0	0	0
-12 x Pivot	0	-12	0	0	-12	0	0	-12 x 500 = -6000
Nouvelle Di	4	0	3	0	-12	0	0	-6000

Ci	i	1	2	3	4	5	6	7	Xi	
	4	1	0	0	1	0	0	0	1000	1000 / 1 = 1000
12	2	0	1	0	0	1	0	0	500	500 / 0^+ = infini
	6	0	0	1	0	0	1	0	1500	1500 / 0^+ = infini
	7	3	0	2	0	-6	0	1	3750	3750 / 3 = 1250
	Di	4	0	3	0	-12	0	0	6000	
		E			S					

Ancienne ligne 7	3	0	2	0	-6	0	1	3750
-3 x Pivot	-3	0	0	-3	0	0	0	-3 x 1000 = -3000
Nouvelle ligne 7	0	0	2	-3	-6	0	1	750
Ancienne Di	4	0	3	0	-12	0	0	-6000
-4 x Pivot	-4	0	0	-4	0	0	0	-4 x 1000 = -4000
Nouvelle Di	0	0	3	-4	-12	0	0	-10000

Ci	i	1	2	3	4	5	6	7	Xi	
4	1	1	0	0	1	0	0	0	1000	1000 / 0^+ = infini
12	2	0	1	0	0	1	0	0	500	500 / 0^+ = infini
	6	0	0	1	0	0	1	0	1500	1500 / 1 = 1500
	7	0	0	2	-3	-6	0	1	750	750 / 2 = 375
	Di	0	0	3	-4	-12	0	0	10000	
				E				S		

Ancienne ligne 6	0	0	1	0	0	1	0	1500
-1/2 x Pivot	0	0	-1	3/2	3	0	-1/2	-375
Nouvelle ligne 6	0	0	0	3/2	3	1	-1/2	1125
Ancienne Di	0	0	3	-4	-12	0	0	-10000
-3/2 x Pivot	0	0	-3	9/2	9	0	-3/2	-3/2 x 750 = -1125
Nouvelle Di	0	0	0	½	-3	0	-3/2	-11125

Ci	i	1	2	3	4	5	6	7	Xi	
4	1	1	0	0	1	0	0	0	1000	1000 / 1 = 1000
12	2	0	1	0	0	1	0	0	500	500 / 0^+ = infini
	6	0	0	0	3/2	3	1	-1/2	1125	1125 / (3/2) = 750
3	3	0	0	1	-3/2	-3	0	½	375	375 / (-3/2) < 0
	Di	0	0	0	½	-3	0	-3/2	11125	
					E		S			

Ancienne ligne 1	1	0	0	1	0	0	0	1000
-1 x Pivot	0	0	0	-1	-2	-2/3	1/3	-750
Nouvelle ligne 1	1	0	0	0	-2	-2/3	1/3	250
Ancienne ligne 3	0	0	1	-3/2	-3	0	½	375
+1 x Pivot	0	0	0	3/2	3	1	-1/2	1125
Nouvelle ligne 3	0	0	1	0	0	1	0	1500
Ancienne Di	0	0	0	½	-3	0	-3/2	-11125
-1/3 x Pivot	0	0	0	-1/2	-1	-1/3	1/6	-1/3 x 1125 = -375
Nouvelle Di	0	0	0	½	-3	0	-3/2	-11500

Ci	i	1	2	3	4	5	6	7	Xi
4	1	1	0	0	0	-2	-2/3	1/3	250
12	2	0	1	0	0	1	0	0	500
½	4	0	0	0	1	2	2/3	-1/3	750
3	3	0	0	1	0	0	1	0	1500
	Di	0	0	0	0	-4	-1/3	-8/6	11500

Résultat : (4 * 250) + (12 * 500) + (3 * 1500) = 11500
X1 = 250
X2 = 500
X3 = 1500
Max = 11500

Ex :

Soit le programme linéaire
Maximiser Z = F(X1, X2) = 2 X1 + X2 (D4)

Sous les contraintes :

X1 – X2 <= 3 (D1)
X1 – 2 X2 <= 6 (D2)
-X1 + 2 X2 <= 2 (D3)
X1 >= 0
X2 >= 0

- Résoudre graphiquement

Pour D1 : X1 – X2 = 3 Quand X1 = 1 alors X2 = 1-3 = -2 Quand X1 = 0 alors X2 = -3	Pour D2 : X1 + 2 X2 = 6 Quand X1 = 0 alors X2 = 6/2 = 3 Quand X2 = 0 alors X1 = 6
Pour D3 : -X1 + X2 = 2 Quand X1 = 0 alors X2 = 1 Quand X2 = 0 alors X1 = -2	Pour D4 : 2 X1 + X2 = 0 Quand X1 = 0 alors X2 = 0 Quand X1 = 2 alors X2 = -4

VOIR ANNEXE 4

Quand X1 = 4 et X2 = 1, on attend le max (2x4 + 1=) 9

- Résoudre le programme linéaire par la méthode du simplexe

$$\begin{cases} X1 - X2 + X3 = 3 \\ X1 + 2\,X2 + X4 = 6 \\ -X1 + 2\,X2 + X5 = 2 \\ X1 >= 0 ; X2 >= 0 ; X3 >= 0 ; X4 >= 0 ; X5 >= 0 \end{cases}$$

Max F(X1, X2, X3, X4, X5) = 2 X1 + X2

Ci	i	1	2	3	4	5	Xi	
	3	1	-1	1	0	0	3	3 / 1 = 3
	4	1	2	0	1	0	6	6 / 1 = 6
	5	-1	2	0	0	1	2	2 / -1 = -2
	Di	2	1	0	0	0	0	
		E		S				

Ancienne ligne 4	1	2	0	1	0	6
-1 x Pivot	-1	1	-1	0	0	-3
Nouvelle ligne 4	0	3	-1	1	0	3
Ancienne ligne 5	-1	2	0	0	1	2
1 x Pivot	1	-1	1	0	0	3
Nouvelle ligne 5	0	1	1	0	1	5
Ancienne Di	2	1	0	0	0	0
-2 x Pivot	-2	2	-2	0	0	-6
Nouvelle Di	0	3	-2	0	0	-6

Ci	i	1	2	3	4	5	Xi	
2	1	1	-1	1	0	0	3	3 / -1 = -3
	4	0	3	-1	1	0	3	3/3 = 1
	5	0	1	1	0	1	5	5 / 1 = 5
	Di	0	3	-2	0	0	6	
			E		S			

Ancienne ligne 1	1	-1	1	0	0	3
1/3 x Pivot	0	1	-1/3	1/3	0	1
Nouvelle ligne 1	1	0	2/3	1/3	0	4
Ancienne ligne 5	0	1	1	0	1	5
-1/3 x Pivot	0	-1	1/3	-1/3	0	-1
Nouvelle ligne 5	0	1	1	0	1	4
Ancienne Di	0	3	-2	0	0	-6
-1 x Pivot	0	-3	1	-1	0	-3
Nouvelle Di	0	0	-1	-1	0	9

Ci	i	1	2	3	4	5	Xi	
2	1	1	0	2/3	1/3	0	4	Valeur de la solution de base X
3	2	0	1	-1/3	1/3	0	1	
	5	0	0	4/3	-1/3	0	2	Coeff initiaux de la fonction économique
	Di	0	0	-1	-1	0	9	

Coefficient de la fonction économique sur la base Ci

Profit marginaux

Opposée de la valeur de la fonction économique pour la solution économique

Résultat : (2*4) + (1*1) = 9
X1 = 4
X2 = 1
Max = 9

Ex : Production d'un atelier

Un atelier peut fabriquer 3 types d'articles

A1 à la cadence de 35 objets par heure
A2 à la cadence de 45 objets par heure
A3 à la cadence de 20 objets par heure
Cette fabrication utilise une machine outil unique disponible 200 heures par mois.

Le bénéfice unitaire est de 60FF par objet A1, 40FF par objet A2 et 80FF par objet A3
On ne peut vendre par mois plus de 4900 A1, ni plus de 5400 A3, ni plus de 2000 A3

Chaque objet doit être vérifié avant commercialisation par une équipe de 3 techniciens.
Chacun d'eux travaille 170h/mois.
La vérification est de 4 minutes par A1, 3 minutes par A2 et 2 minutes par A3

<u>1) Montrer qu'une contrainte est redondante</u>

Avec les cadences de fabrication on obtient l'inéquation (1) :
(1/35) X1 + (1/45) X2 + (1/20) X3 <= 200

Avec le temps passé pour la vérification on obtient l'inéquation (2) :
4 X1 + 3 X2 + 2 X3 <= (170 heures * 60 minutes * 3 personnes)
=> 4 X1 + 3 X2 + 2 X3 <= 30600

Pour savoir quelle est la condition redondante (ou plus précisément inutile) il faut avoir un coté de l'inéquation identique
    Avec l'inéquation (1) : (1/35) X1 + (1/45) X2 + (1/20) X3 <= 200
    multiplier par 153 => 4,37 X1 + 3,4 X2 + 7,6 X3 <= 30600

Donc en comparant les coefficients multiplicateurs un par un on constate que Tous ceux de l'inéquation (1) sont supérieurs à ceux de l'inéquation (2). (4,37 > 4 ; 3,4 > 3 et 7,6 > 2)
Donc l'inéquation (2) n'est pas utile ici.
(Pour vérifier graphiquement : alimenter X1 et X2 à zéro et calculer la valeur de X3, le plus petit X3 est à conserver)

Pour simplifier le problème et éviter les fractions on peut multiplier l'inéquation (1) par 1260 on obtient ainsi
(1260/35) X1 + (1260/45) X2 + (1260/20) X3 <= (200 * 1260)
=> **36 X1 + 28 X2 + 63 X3 <= 252000**

X1 >= 0
X2 >= 0
X3 >= 0
X1 <= 4900
X2 <= 5400
X3 <= 2000

Max (60 X1 + 40 X2 + 80 X3)

<u>2) Classer les produits par bénéfices horaires décroissants et faire une résolution économique</u>

1 heure machine par A1 génère 36*60 = 2100 FF
1 heure machine par A2 génère 45*40 = 1800 FF
1 heure machine par A3 génère 20*80 = 1600 FF

Le temps machine est une ressource rare car pour saturer la machine en A1, A2 ; A3 il faudrait :
(4900/35) + (5400/45) + (2000/20) = 360 heures de production

On va donc attribuer le temps machine aux produits les plus intéressant en terme de gain horaire c'est à dire A1 puis A2 et enfin A3.
Fabrication A1 : 4900 unités = 140 h reste 200 – 140 = 60 h
Fabrication A2 : 60 h >= 2700 unités, reste 0 h machine
Fabrication A3 : 0

La solution optimale est donc X1 = 4900, X2 = 2700 et X3 = 0.
4900 * 60 + 2700 * 40 + 0 * 80 => Le bénéfice s'élève donc de 402000 Francs / mois.

3) Vérifier en utilisant la méthode du simplexe

Ci	i	1	2	3	4	5	6	7	Xi	
	4	1	0	0	1	0	0	0	4900	4900/1= 4900
	5	0	1	0	0	1	0	0	5400	5400/0^+= infini
	6	0	0	1	0	0	1	0	2000	2000/0^+= infini
	7	36	28	63	0	0	0	1	252000	
	Di	60	40	80	0	0	0	0	0	
		E			S					

Ci	i	1	2	3	4	5	6	7	Xi	
60	1	1	0	0	1	0	0	0	4900	4900/0^+= infini
	5	0	1	0	0	1	0	0	5400	5400/1= 5400
	6	0	0	1	0	0	1	0	2000	2000/0^+= infini
	7	0	28	63	-36	0	0	1	75600	75600/28=2700
	Di	0	40	80	-60	0	0	0	294000	
			E			S				

Ci	i	1	2	3	4	5	6	7	Xi
60	1	1	0	0	1	0	0	0	4900
	5	0	0	-9/4	9/7	1	0	-1/28	2700
	6	0	0	1	0	0	1	0	2700
40	2	0	1	9/4	-9/7	0	0	1/28	2700
	Di	0	0	-10	-60/7	0	0	-10/7	402000
			E			S			

Résultat : (60*4900) + (40*2700) + (80*0) = 402000
X1 = 4900
X2 = 2700
Max = 402000

Ex : Soit le programme linéaire suivant
Max Z = X1 + 2 X2
X1 >= 0 et X2 >= 0
- 2 X1 + X2 <= 2
- X1 + 2 X2 <= 5
X1 – 4 X2 <= 4
Question tenter de résoudre ce programme linéaire par la méthode du simplexe
Faire une résolution graphique

Ci	i	1	2	3	4	5	Xi	
	3	-2	1	1	0	0	2	2 / 1 = 2
	4	-1	2	0	1	0	5	5 / 2 = 2,5
	5	1	-4	0	0	1	4	4 / -4 = -1
	Di	1	2	0	0	0	0	
			E	S				

	1	2	3	4	5	Xi
Ancienne ligne 4	-1	2	0	1	0	5
-2 x Pivot	4	-2	-2	0	0	-4
Nouvelle ligne 4	3	0	-2	1	0	1
Ancienne ligne 5	1	-4	0	0	1	4
4 x Pivot	-8	4	4	0	0	8
Nouvelle ligne 5	-7	0	4	0	1	12
Ancienne Di	1	2	0	0	0	0
-2 x Pivot	4	-2	-2	0	0	-4
Nouvelle Di	5	0	-2	0	0	-4

Ci	i	1	2	3	4	5	Xi	
2	2	-2	1	1	0	0	2	2/-2 = -1
	4	3	0	-2	1	0	1	1/3 = 0,33
	5	-7	0	4	0	1	12	12/ -7 = -1,71
	Di	5	0	-2	0	0	-4	
		E			S			

	1	2	3	4	5	Xi
Ancienne ligne 2	-2	1	1	0	0	2
2/3 x Pivot	2	0	-4/3	2/3	0	2/3
Nouvelle ligne 2	0	1	-1/3	2/3	0	8/3
Ancienne ligne 5	-7	0	4	0	1	12
7/3 x Pivot	7	0	-14/3	7/3	0	7/3
Nouvelle ligne 5	0	0	-2/3	7/3	0	43/3
Ancienne Di	5	0	-2	0	0	-4
-5/3 x Pivot	-5	0	10/3	-5/3	0	-5/3
Nouvelle Di	0	0	4/3	-5/3	0	-17/3

Ci	i	1	2	3	4	5	Xi	
2	2	0	1	-1/3	2/3	0	8/3	(8/3)/(-1/3) < 0
5	1	1	0	-1/3	1/3	0	1/3	(1/3)/(-1/3) < 0
	5	0	0	-2/3	7/3	0	43/3	(43/3)/(-2/3) < 0
	Di	0	0	4/3	-5/3	0	17/3	
				E				

On ne peut trouver le pivot car tous les éléments de A3 sont négatifs. Dans ce cas il y a une solution non bornée supérieurement

Ex : Production de minerais (1ère session examen du 28/03/2001)

Avec le tableau de la production obtenue et celui des limitations de production on obtient :

Max Z = 4 X1 + 5 X2 + 4 X3

X1 >= 0, X2 >= 0, X3 >= 0

0,02 X1 + 0,25 X2 + 0,06 X3 <= 300
0,1 X1 + 0,3 X3 <= 1050
0,08 X1 + 0,25 X2 + 0,04 X3 <= 200
0,5 X1 + 0,3 X3 <= 1200
0,3 X1 + 0,5 X2 + 0,3 X3 <= 1500

En multipliant par 10 la première inéquation on obtient 0,2 X1 + 2,5 X2 + 0,6 X3 <= 3000
En multipliant par 15 la troisième inéquation on obtient 1,2 X1 + 3,75 X2 + 0,6 X3 <= 3000
En multipliant par 2 la cinquième inéquation on obtient 0,6 X1 + 1 X2 + 0,6 X3 <= 3000
On constate que tous les coefficients des inconnues de la troisième inéquation sont supérieurs ou égaux aux coefficients des inconnues des deux autres inéquations. Pour optimiser on peut donc considérer ces 2 dernières comme redondantes ou inutiles.

Ci	i	1	2	3	4	5	6	Xi
	4	0,1	0	0,3	1	0	0	1050
	5	0,08	0,25	0,04	0	1	0	200
	6	0,5	0	0,3	0	0	1	1200
	Di	4	5	4				

On multiplie par 100 chaque inéquations et on obtient :

Ci	i	1	2	3	4	5	6	Xi	
	4	10	0	30	100	0	0	105000	=105000/0+=Infini
	5	8	25	4	0	100	0	20000	20000/25 = 800
	6	50	0	30	0	0	100	120000	120000/0+=Infini
	Di	4	5	4	0	0	0	0	
			E			S			

	1	2	3	4	5	6	Xi
Ancienne Di	20/5	5	20/5	0	0	0	0
-1/5 x Pivot	-8/5	-5	-4/5	0	-20	0	-4000
Nouvelle Di	12/5	0	16/5	0	-20	0	-4000

Ci	i	1	2	3	4	5	6	Xi	
	4	10	0	30	100	0	0	105000	=105000/30=3500
5	2	8	25	4	0	100	0	20000	20000/4=5000
	6	50	0	30	0	0	100	120000	120000/30=4000
	Di	12/5	0	16/5	0	-20	0	4000	
				E	S				

Ancienne ligne 2	24/3	25	4	0	100	0	20000
-4/30 x Pivot	-4/3	0	-4	-40/3	0	0	-14000
Nouvelle ligne 2	20/3	25	0	-40/3	100	0	6000
Ancienne 6	50	0	30	0	0	100	120000
-1 x Pivot	-10	0	-30	-100	0	0	-105000
Nouvelle 6	40	0	0	-100	0	100	15000
Ancienne Di	36/15	0	16/5	0	-20	0	-4000
-8/75 x Pivot	-16/15	0	-16/5	-32/3	0	0	-11200
Nouvelle Di	4/3	0	0	-32/3	-20	0	-15200

Ci	i	1	2	3	4	5	6	Xi	
16/5	3	10	0	30	100	0	0	105000	105000/10=10500
5	2	20/3	25	0	-40/3	100	0	6000	900
	6	40	0	0	-100	0	100	15000	15000/40=375
	Di	4/3	0	0	-32/3	-20	0	15200	
		E					S		

Ancienne ligne 4	10	0	30	100	0	0	105000
-1/4 x Pivot	-10	0	0	25	0	-25	-3750
Nouvelle ligne 4	0	0	30	75	0	-25	101250
3 x Ancienne 2	20	75	0	-40	300	0	18000
-1/2 x Pivot	-20	0	0	50		-50	-7500
Nouvelle 2	0	75	0	10	300	-50	10500
Ancienne Di	4/3	0	0	-32/3	-20	0	-15200
-1/30 x Pivot	-4/3	0	0	10/3	0	-10/3	-500
Nouvelle Di	0	0	0	-22/3	-20	-10/3	-15700

Ci	i	1	2	3	4	5	6	Xi
16/5	3	0	0	30	75	0	-25	101250
5	2	0	75	0	10	300	-50	10500
4/3	1	40	0	0	-100	0	100	15000
	Di	0	0	0	-22/3	-20	-10/3	15700

Il faut donc
15000 / 40 = 375 tonnes de minerais 1
10500 / 75 = 140 tonnes de minerais 2
101250 / 30 = 3375 tonnes de minerais 3

Max = 4 x (15000 / 40) + 5 x (10500 / 75) + 4 x (101250 / 30) = 4 x 375 + 5 x 140 + 4 x 3375 = 1500+700+13500 = 15700
Le bénéfice réalisé est de 15700 unités monétaires.

Quantité totale de fer :
375 x 0,02 + 140 x 0,25 + 3375 x 0,06 = 7,5 + 35 + 202,5 = 245 tonnes de fer

Quantité totale de manganèse :
375 x 0,1 + 3375 x 0,3 = 37,5 + 1012,5 = 37,5 + 1012,5 = 1050 tonnes de manganèses

Quantité de cuivre :
375 x 0,08 + 140 x 0,25 + 3375 x 0,04 = 30 + 35 + 135 = 200 tonnes de cuivre

Quantité totale de nickel :
375 x 0,5 + 3375 x 0,3 = 187,5 + 1012,5 = 1200 tonnes de nickel

Quantité totale de plomb :
375 x 0,3 + 140 x 0,5 + 3375 x 0,3 = 112,5 + 70 + 1012,5 = 1195 tonnes de plomb